24/10/2017

ΕΜΠΕΙΡΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ (Fisher 1900)

	N	$n(k)$	$\frac{n(k)}{N}$
Buffon	4040	2048	0,5080
Pearson	12.000	6019	0,5016
Pearson	24.000	12.012	0,5005

Ορισμός: Αν μια διαδικασία επαναληφθεί N-φορές και στην ακολουθία των N-επαναλήψεων $n(E)$ φορές εμφανίζεται το ενδεχόμενο E, τότε η εμπειρική πιθανότητα πραγματοποίησης του E. $\boxed{P(E) = \lim_{N\to\infty} \frac{n(E)}{N}}$

Ιδιότητες:

1. $0 \le P(E) \le 1$
2. $P(S) = \lim_{N\to\infty} \frac{n(S)}{N} = 1$
3. Αν A, B ασυμβ. $A \cap B = \emptyset$

$$P(A\cup B) = \lim_{N\to\infty} \frac{n(A\cup B)}{N} = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{n(A)+n(B)}{N}\right) = \lim_{N\to\infty}\frac{n(A)}{N} + \lim_{N\to\infty}\frac{n(B)}{N} =$$

$$= P(A) + P(B)$$

ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ (Kolmogorov 1933)

Στοιχεία:

1. Ένα μη κενό σύνολο S $(S \neq \emptyset)$
2. Έστω $\mathcal{A}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του S τέτοια ώστε:
   α) $S \in \mathcal{A}$
   β) Αν $A \in \mathcal{A}$ το $A^c \in \mathcal{A}$
   γ) Αν $A_1, A_2, \ldots$ μια ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$ τότε και $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

σ-πεδίο ή σ-άλγεβρα

Ορισμός: Έστω $S \neq \emptyset$ και $\mathcal{A}$ η σ-άλγεβρα υποσυνόλων του S. Η συνολοσυνάρτηση $P: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ λέγεται πιθανότητα ή μέτρο πιθανότητας αν ικανοποιεί τα αξιώματα:

A1) $P(A) \geq 0 \quad , \quad \forall A \in \mathcal{A}$

A2) $P(S) = 1$

A3) Αν $A_i \in \mathcal{A}$, $i=1,2,\dots$ με $A_i \cap A_j = \emptyset$ για $i \neq j$ τότε:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Αξιώματα του Kolmogorov

* Η τριάδα $(S, \mathcal{A}, P)$ λέγεται χώρος πιθανοτήτων

Παράδειγμα

Αν $S \neq \emptyset$ πεπερασμένο και $\mathcal{A}$ η σ-άλγεβρα τότε η συνολοσυνάρτηση $P: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, $P(A) = \dfrac{\|A\|}{\|S\|}$, $A \in \mathcal{A}$ ικανοποιεί αξίωματα Kolmogorov.

απόδειξη:

A1) $P(A) \geq 0$
A2) $P(S) = 1$

$\Big\}$ προφανή

A3) Έστω $A_i \in \mathcal{A}$, $i=1,2,\dots$ $A_i \cap A_j = \emptyset$ $i \neq j$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \frac{\left\|\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\|}{\|S\|} = \frac{\|A_1\| + \|A_2\| + \dots}{\|S\|} = \frac{\|A_1\|}{\|S\|} + \frac{\|A_2\|}{\|S\|} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Πρόταση: (Ιδιότητες των Πιθανοτήτων)

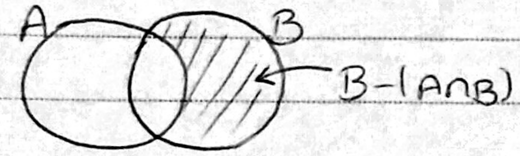
Έστω χ.π. $(S, \mathcal{A}, P)$. Τότε ισχύουν:

1. $P(\emptyset) = 0$
2. Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $\begin{cases} α) & P(A^c) = 1 - P(A) \\ β) & 0 \leq P(A) \leq 1 \end{cases}$
3. Αν $A, B \in \mathcal{A}$ με $A \subseteq B$ $\begin{cases} α) & P(A) \leq P(B) \\ β) & P(B-A) = P(B) - P(A) \end{cases}$
4. Αν $A, B \in \mathcal{A}$ τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

5. Αν $A_k \in \mathcal{A}$, $k=1,2..$ μια αύξουσα ~~τα~~ ακολουθία ($A_k \subseteq A_{k+1}$)
τότε $P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

6. Αν $A_k \in \mathcal{A}$, $k=1,2..$ μια φθίνουσα ακολουθία ($A_{k+1} \subseteq A_k$)
τότε $P(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

Απόδειξη 4



$A\cup B = A \cup [B - A\cap B]$

$P(A\cup B) = P[A\cup(B-(A\cap B))] \overset{A3}{=} P(A) + P(B-(A\cap B)) =$

$\overset{A\cap B \subseteq B}{\underset{3b}{=}} P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

Γενίκευση τριών ενδεχομένων
$P(A\cup B\cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(A\cap B) - P(B\cap\Gamma) - P(A\cap\Gamma) + P(A\cap B\cap\Gamma)$
Γενικεύεται στην περίπτωση n-ενδεχομένων

Ανισότητα Boole
Αν $A_i \in \mathcal{A}_i$ $i=1,2,3,..$ τότε $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Παράδειγμα: Αν $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ νδο:
$\max\{0, \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - n + 1\} \le P(A_1\cap A_2\cap \dots \cap A_n) \le$
$\le \min\{P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_n)\}$

απόδειξη:
$A_1\cap A_2 \cap \dots \cap A_n \subseteq A_i$, $i=1,\dots,n$
$\Downarrow$ 3a
$P(A_1\cap A_2\cap \dots\cap A_n) \le P(A_i)$ $i=1,\dots,n$
$\Downarrow$
$P(A_1\cap\dots\cap A_n) \le \min\{P(A_1), \dots, P(A_n)\}$

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \xlongequal{2\alpha} 1 - P\left[\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c\right] \xlongequal{\text{de Morgan}}$$

$$= 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right)$$

$$\geq -1 - \sum_{i=1}^{n} P(A_i^c)$$

Ανισότητα του Boole: $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i^c) =$

$$= 1 - \sum_{i=1}^{n} [1 - P(A_i)] = 1 - \left(n - \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\right) =$$

Τελικά
$$\left.\begin{aligned} P(A_1 \cap \dots \cap A_n) &\geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - n + 1 \\ P(A_1 \cap \dots \cap A_n) &\geq 0 \end{aligned}\right\} P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \geq \max\left\{0, \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - n + 1\right\}$$